

Universidad del CEMA

Finanzas Matemáticas — Trabajo Final

# The Value of Waiting to Invest

McDonald y Siegel (1986)

## Integrantes

Felipe Velarde

Elias Hwang

Agustín Bossart

Mariano Sanchez

## Profesora

Corina Averbuj

## Fecha de presentación

14 de julio de 2026

# Sumario

1. El error del VAN tradicional y el valor de esperar
2. El problema de inversión y los supuestos del modelo
3. La regla óptima y el valor de la opción de esperar
4. La tasa de descuento (CAPM) y las extensiones del modelo
5. Resultados numéricos, el monopolista y conclusiones

# Motivación: el error del VAN tradicional

- Construir es *irreversible* — el capital queda hundido, sin uso alternativo —, mientras que diferir la inversión es *reversible*. Esa asimetría es el corazón del problema.
- Invertir hoy no compite solo con “no invertir”: compite con *todas* las alternativas futuras, mutuamente excluyentes, de invertir más adelante.

Invertir apenas “ $VAN > 0$ ” (en  $V = F$ ) solo es óptimo en dos casos degenerados: si  $\sigma_v^2 = \sigma_f^2 = 0$  o si  $\alpha_v \rightarrow -\infty$ . En cualquier otro caso hace falta un **margen positivo**.

# Objetivo del paper

El objetivo es estudiar el *timing óptimo* de la inversión en un proyecto irreversible, cuando los beneficios esperados y los costos de inversión siguen procesos estocásticos en tiempo continuo.

A diferencia de los modelos previos, deriva una *regla de inversión óptima* y una fórmula explícita para valuar la opción de esperar, incorporando formalmente la aversión al riesgo de los inversores.

Y demuestra, mediante simulaciones numéricas, que el valor de esa opción es significativo: aplicar la regla tradicional del “VAN = 0” genera *pérdidas sustanciales*.

# El problema de inversión

- En cualquier momento  $t$ , la firma puede pagar un costo  $F_t$  para instalar un proyecto cuyo valor presente de flujos netos esperados es  $V_t$ .
- Ambos son estocásticos y siguen **movimientos brownianos geométricos**, con  $dz_v$ ,  $dz_f$  procesos de Wiener:

$$\frac{dV}{V} = \alpha_v dt + \sigma_v dz_v$$

$$\frac{dF}{F} = \alpha_f dt + \sigma_f dz_f$$

- El MBG hace del cero una *barrera absorbente* natural.
- **Vida infinita** ( $T = \infty$ ): umbral óptimo constante.
- La inversión se hace *toda de una vez*, no por etapas.

# Caso especial: costo de inversión fijo

- Si el costo  $F$  es constante, su volatilidad y su deriva se anulan:

$$\sigma_f = 0, \quad \alpha_f = 0$$

- Lejos de perder la solución analítica, el problema de dos variables estocásticas colapsa a una sola ( $V$ ).
- Es el caso clásico de la *opción americana perpetua*, resuelto con fórmula analítica cerrada.

# ¿Y si la oportunidad puede vencer?

- Con fecha de vencimiento fija ( $T < \infty$ ) **no hay solución analítica**: cerca del límite, la frontera óptima de ejercicio cambia con el calendario y se necesitan métodos numéricos (árboles binomiales, diferencias finitas).
- Con *vencimiento incierto* sí: se modela con un **salto de Poisson**, probabilidad constante  $\lambda dt$  de que  $V$  caiga a cero (obsolescencia, entrada de un rival).
- La estructura analítica queda idéntica al caso base; el riesgo de salto solo penaliza la tasa de descuento:

$$\mu \longrightarrow \mu + \lambda$$

# Un mismo marco, varios problemas

- **Monopolista:** tras instalar la capacidad queda protegido de la competencia; los flujos del proyecto están resguardados.
- **Industria competitiva:** rentas temporales — la entrada rezagada de competidores empuja los beneficios hacia los costos (deriva post-inversión menor o negativa).
- **Intercambio de activos:** invertir equivale a cambiar un activo riesgoso ( $F$ ) por otro ( $V$ ).
- **Desguace óptimo:** reinterpretando  $F$  como el valor en operación y  $V$  como el valor de descarte.

- Opciones y proyectos pertenecen a *portafolios bien diversificados*: la aversión al riesgo entra solo a través del *riesgo sistemático*.
- Ese supuesto habilita usar el CAPM para fijar la tasa de descuento correcta de los flujos: la tasa de rendimiento de equilibrio exigida a la inversión.

El CAPM es la pieza que permite obtener  $\mu$ , la tasa a la que se descuentan los flujos. Su desarrollo se retoma más adelante.

## ¿Por qué $\alpha_v < \hat{\alpha}_v$ ? La analogía del dividendo

- Mientras la firma no invierte, posterga los flujos de caja que el proyecto ya estaría repartiendo. Ese costo de oportunidad es el *rendimiento por dividendos*  $\delta$ .

$$\delta = \hat{\alpha}_v - \alpha_v \implies \alpha_v = \hat{\alpha}_v - \delta < \hat{\alpha}_v$$

Por lo tanto:  $\alpha_v < \hat{\alpha}_v$

- $\hat{\alpha}_v$  es el retorno de equilibrio exigido a  $V$ ; como parte llega como dividendo ( $\delta > 0$ ), el valor latente se aprecia más lento.
- Si fuese  $\alpha_v \geq \hat{\alpha}_v$ , la opción *divergiría a infinito* y la firma jamás invertiría.

# El desarrollo en tres pasos

Se construye la *regla de decisión óptima* y el valor de la oportunidad de inversión:

1.  $V$  y  $F$  siguen movimientos brownianos geométricos.
2. Se obtiene la *tasa de descuento correcta* cuando los inversores son reacios al riesgo.
3. Se admite que  $V_t$  pueda caer repentinamente a cero.

# Umbral de inversión: el caso $F$ constante

Para introducir el problema,  $V_t$  sigue un MBG y  $F$  es constante. La firma recibe  $V_t - F$  al invertir, y la regla óptima es un **umbral**: invertir cuando  $V_t/F \geq C_t^*$ .

Si la oportunidad vence en  $T$ : allí conviene invertir si  $V_T \geq F$ , o sea  $C_T^* = 1$ ; hacia atrás en el tiempo, cada instante  $t$  tiene su umbral  $C_t^*$ .

En  $V_t/F = C_t^*$ , el VAN es  $F(C_t^* - 1)$ . Para una barrera arbitraria, el valor de la oportunidad es el valor presente esperado del payoff:

$$X(T) = E_0 \{ e^{-\mu t'} (V_{t'} - F) \}$$

# Vida infinita: el umbral se vuelve constante

Cuando la oportunidad tiene *vida infinita* ( $T \rightarrow \infty$ ) desaparece el tiempo calendario: el umbral no puede depender de  $t$ , así que  $C_t^* = C^*$  para todo  $t$ .

Entonces  $V_{t'} - F = F(C^* - 1)$  es constante, y maximizar  $X(T)$  se reduce a

$$\max_{C'} F(C' - 1) E_0\{e^{-\mu t'}\}$$

Es un caso especial del problema general que sigue.

# Modelo general: $F$ también estocástico

La caracterización del umbral ya no es evidente, pero la regla sigue siendo de umbral sobre el ratio  $V/F$ .

**Homogeneidad de grado cero:** con  $V' = kV$  y  $F' = kF$ ,

$$\frac{dV'}{V'} = \alpha_v dt + \sigma_v dz_v \qquad \frac{dF'}{F'} = \alpha_f dt + \sigma_f dz_f$$

el problema es formalmente idéntico, de modo que el umbral no depende de  $k$  (es homogéneo de grado cero en  $V$ ,  $F$ ) ni del calendario cuando  $T \rightarrow \infty$ .

Regla óptima: invertir cuando  $V_t/F_t \geq C^*$ .

# La solución del modelo general

El apéndice demuestra que la región de inversión es  $[C^*, \infty)$ . Como el factor  $C^* - 1$  es constante, sale de la esperanza:

$$E_0\{F_{t'} [C^* - 1] e^{-\mu t'}\} = [C^* - 1] E_0\{F_{t'} e^{-\mu t'}\}$$

y el valor de la oportunidad de inversión resulta

$$X = (C^* - 1) F_0 \left( \frac{V_0/F_0}{C^*} \right)^\varepsilon$$

El exponente  $\varepsilon$  es la raíz positiva de la ecuación característica del apéndice.

# El exponente $\varepsilon$

Depende de las derivas  $\alpha_v, \alpha_f$ , la varianza conjunta  $\sigma^2$  y la tasa de descuento  $\mu$ :

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\alpha_v - \alpha_f}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2(\mu - \alpha_f)}{\sigma^2}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_v - \alpha_f}{\sigma^2}\right)$$

con  $\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_f^2 - 2\rho_{vf}\sigma_v\sigma_f$  la varianza del ratio  $V/F$ .

La condición  $\alpha_v < \mu$  garantiza  $\varepsilon > 1$ , y por lo tanto  $C^* > 1$ .

# Desarrollo matemático (apéndice)

El valor  $L(V, F) = E_0\{F_{t'} e^{-\mu t'}\}$ , con  $t'$  el primer instante en que  $V/F$  toca  $C^*$ , satisface por **Feynman-Kac** la EDP (A.2):

$$\mu L = \frac{1}{2} \left[ L_{vv} V^2 \sigma_v^2 + L_{ff} F^2 \sigma_f^2 + 2L_{vf} VF \sigma_{vf} \right] + L_v \alpha_v V + L_f \alpha_f F$$

Condiciones de contorno (se decide invertir en  $[C^*, \infty)$ ):

- (i)  $L = F$  en la barrera  $V/F = C^*$ : aquí  $t' = 0$  y se invierte.
- (ii)  $L \rightarrow 0$  cuando  $V/F \rightarrow 0$ :  $t' \rightarrow \infty$ , nunca se invierte.

## Apéndice: la ecuación característica

Se propone la forma funcional  $L = k F^a C^b$ , con  $C = V/F$ . La condición (i) fija  $a = 1$  y  $k = (C^*)^{-b}$ ; sustituyendo en (A.2) se obtiene la ecuación característica (A.4):

$$\mu = \frac{1}{2} b (b - 1) \sigma^2 + b \alpha_v + (1 - b) \alpha_f$$

La condición (ii) exige  $b > 0$ : la raíz positiva es  $b = \varepsilon$ , el exponente que aparece en  $X$ .

## El umbral óptimo $C^* = \varepsilon/(\varepsilon - 1)$

Maximizando el valor  $X$  respecto de la barrera  $C^*$ :

$$\frac{dX}{dC^*} = 0 \implies (1 - \varepsilon) C^* + \varepsilon = 0 \implies C^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

Como  $\varepsilon > 1$ , resulta  $C^* > 1$ : el umbral óptimo *siempre supera* el punto donde el VAN se anula.

# Aclaraciones sobre el modelo general

- Si  $F$  es no estocástico,  $X$  coincide con la fórmula de **Samuelson (1970)** para una call americana de vida infinita sobre una acción que paga dividendos.
- Si  $T$  es finito, o si los parámetros dependen de  $V$ ,  $F$  y  $t$ , **no hay solución analítica**: se recurre a aproximaciones numéricas (Ingersoll, 1977).

# Estáticas comparativas

- $X$  y  $C^*$  son **crecientes en la varianza** de  $V/F$ : más varianza amplía la ganancia máxima y deja igual la pérdida máxima.
- Solo interviene  $\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_f^2 - 2\rho_{vf}\sigma_v\sigma_f$ : un aumento de  $\sigma_v^2$  o  $\sigma_f^2$ , o una caída de  $\rho_{vf}$ , eleva el valor de la opción.
- $X$  es creciente en  $\alpha_v$  y decreciente en  $\alpha_f$  y  $\mu$ .

El análisis referido solo a las derivas es de interés limitado: lo que importa son los costos de oportunidad  $\delta_v$ ,  $\delta_f$  (sección siguiente).

# Cálculo de la tasa de descuento

Hasta acá se dio por sentada la tasa  $\mu$  a la que se descuentan los flujos. Se demuestra que la tasa esperada de equilibrio de la oportunidad debe ser un **promedio ponderado** de las tasas de activos con el mismo riesgo que  $V$  y  $F$ .

Aplicando el lema de Itô al valor de la opción  $X$ :

$$\frac{dX}{X} = \left[ \varepsilon \alpha_v + (1 - \varepsilon) \alpha_f + \frac{1}{2} \varepsilon (\varepsilon - 1) \sigma^2 \right] dt + \underbrace{\varepsilon \sigma_v dz_v + (1 - \varepsilon) \sigma_f dz_f}_{\text{componente imprevisto}}$$

con  $\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_f^2 - 2\rho_{vf}\sigma_v\sigma_f$ . El retorno de la opción es un promedio ponderado ( $\varepsilon, 1 - \varepsilon$ ) de los de  $V$  y  $F$ .

# Aplicación del CAPM al riesgo

El único riesgo de la opción es su componente imprevisto. Bajo el CAPM, un riesgo  $\sigma_j dz_j$  exige una tasa  $\hat{\alpha}_j$ , y un riesgo  $v\sigma_j dz_j$  exige  $r + v(\hat{\alpha}_j - r)$ .

Aplicándolo a los pesos  $\varepsilon$  y  $1 - \varepsilon$ , la tasa de rendimiento esperada de equilibrio es

$$\mu = r + \varepsilon(\hat{\alpha}_v - r) + (1 - \varepsilon)(\hat{\alpha}_f - r) = \varepsilon\hat{\alpha}_v + (1 - \varepsilon)\hat{\alpha}_f$$

# La solución para $\varepsilon$ en términos de $\delta$

Igualando el rendimiento requerido con el efectivo, la solución cuadrática para  $\varepsilon$  queda en términos de los costos de oportunidad  $\delta_v = \hat{\alpha}_v - \alpha_v$ ,  $\delta_f = \hat{\alpha}_f - \alpha_f$ :

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\delta_f - \delta_v}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\delta_f}{\sigma^2}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_f - \delta_v}{\sigma^2}\right)$$

- Los drift  $\alpha$  **no importan por sí solos**: lo que entra en la solución son los **costos de oportunidad**  $\delta_v$ ,  $\delta_f$ .
- Dos proyectos con riesgo sistemático opuesto pueden valer lo mismo, según los estados en que generen rendimiento.

# Los parámetros $\delta_v$ y $\delta_f$

## Costo de mantener la opción ( $\delta_v$ ):

- Parte del rendimiento exigido de  $V$  a la que se renuncia al percibir solo aumentos de precio.
- Si  $\delta_v$  sube: la inversión óptima se adelanta (menor umbral  $V/F$ ) y la opción *vale menos*.
- Más riesgo sistemático de  $V$  (con  $\alpha_v$  constante) eleva  $\delta_v$ .

## Beneficio de postergar ( $\delta_f$ ):

- Rendimiento de  $F$  al que se renuncia al obtener solo aumentos de precio (costo aplazado).
- Si  $\delta_f$  sube: mayor beneficio por esperar, la opción *vale más*. Más riesgo sistemático de  $F$  eleva  $\delta_f$ .

# La regla de inversión: sin y con incertidumbre

**Sin incertidumbre** ( $\sigma_v^2 = \sigma_f^2 = 0$ ):

$$\hat{X} = (\hat{C} - 1) F_0 \left( \frac{V_0/F_0}{\hat{C}} \right)^{\delta_f/(\delta_f - \delta_v)}, \quad \hat{C} = \delta_f/\delta_v, \quad \text{invertir si } V_0\delta_v \geq F_0\delta_f$$

Válido solo si  $\delta_v < \delta_f$ .

**Con incertidumbre** ( $\sigma^2 > 0$ ): la regla incorpora un término extra  $h$ , el valor de esperar:

$$V_0 \delta_v \geq F_0 \delta_f + h(V_0, F_0), \quad h > 0$$

Ese término  $h$  permite **captar ganancias y evitar pérdidas** — es lo que agrega la opción de esperar.

# Desguace óptimo del proyecto

El modelo es *versátil*: la misma lógica que decide cuándo adquirir un proyecto decide cuándo abandonarlo. Basta reinterpretar las variables:

- $V$ : valor de desguace aleatorio (precio de venta).
- $F$ : valor del proyecto en funcionamiento (valor en uso).
- $V - F$ : beneficio del desguace.

El valor de la opción de desmantelar es

$$X = (C^* - 1) F_0 \left( \frac{V_0/F_0}{C^*} \right)^\varepsilon = (1 - c^*) V_0 \left( \frac{F_0/V_0}{c^*} \right)^{1-\varepsilon}$$

Regla óptima: desmantelar cuando  $F/V$  desciende al umbral  $c^*$ . Con vida finita harían falta métodos numéricos.

# Saltos en $V_t$ : el riesgo de ruina

**Obsolescencia repentina:**  $V_t$  puede caer a cero de golpe (un rival, un salto tecnológico) y dejar inútil al proyecto. Se modela con un proceso mixto **Poisson-Wiener**:

$$\frac{dV}{V} = \alpha_v dt + \sigma_v dz_v + dq$$

con  $dq$  el salto de Poisson (muerte súbita) de intensidad  $\lambda$ . Si el salto ocurre, el proceso se detiene: es una opción de *vencimiento incierto*. El riesgo se absorbe sumando  $\lambda$  a la tasa de descuento ( $\mu \rightarrow \mu + \lambda$ ):

$$X^* = \max_{\{C'_t\}} E_0 \left( e^{-(\mu+\lambda)t'} F[C'_t - 1] \right)$$

# Impacto de la obsolescencia en la regla

Ajustando la tasa con el lema de Itô, el rendimiento requerido es  $r + \varepsilon(\hat{\alpha}_v - r)$ , y  $\varepsilon$  resuelve

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{r - \delta_v}{\sigma_v^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2(r + \lambda)}{\sigma_v^2}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{r - \delta_v}{\sigma_v^2}\right)$$

(si  $F$  es estocástico,  $r$  se reemplaza por  $\delta_f$ ).

- Más  $\lambda$  reduce el valor de la opción y baja el umbral  $C^*$ .
- En opciones financieras puras (Merton, 1976) el riesgo de ruina *aumenta* el valor; en opciones de inversión real lo **destruye**.

# Aplicación del modelo con ejemplos numéricos

Todas las tablas se evalúan en el punto  $V = F = 1$ : el primer punto donde la regla clásica del VAN acepta la inversión.

$$\sigma_v^2 = \sigma_f^2 = 0.04, \quad \delta_v = \delta_f = 0.10, \quad \rho_{vf} = 0, \quad \lambda = 0$$

Datos para el caso base:

- $\sigma = 0.20$ : desvío del equity desapalancado de EEUU.
- $\delta_v = 0.10$ : ratio ganancias/precio de un proyecto instalado.
- $\delta_f = 0.10$ : tasa libre de riesgo, con  $F$  determinístico.

# Valor de la oportunidad de inversión

| $\delta_v$               | 0.05        |             |             | 0.10        |             |             | 0.25        |             |             |
|--------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\rho_{vf}$              | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         |
| $\sigma_v^2, \sigma_f^2$ |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| <b>0.01</b>              | 0.33        | 0.30        | 0.28        | 0.14        | 0.12        | 0.08        | 0.03        | 0.02        | 0.01        |
| <b>0.02</b>              | 0.38        | 0.34        | 0.30        | 0.20        | 0.16        | 0.12        | 0.06        | 0.04        | 0.02        |
| <b>0.04</b>              | <b>0.45</b> | <b>0.40</b> | <b>0.34</b> | <b>0.27</b> | <b>0.23</b> | <b>0.16</b> | <b>0.11</b> | <b>0.08</b> | <b>0.04</b> |
| <b>0.10</b>              | 0.57        | 0.51        | 0.43        | 0.40        | 0.34        | 0.25        | 0.21        | 0.16        | 0.09        |
| <b>0.20</b>              | 0.67        | 0.61        | 0.51        | 0.52        | 0.45        | 0.34        | 0.32        | 0.25        | 0.16        |
| <b>0.30</b>              | 0.73        | 0.67        | 0.57        | 0.60        | 0.52        | 0.40        | 0.39        | 0.32        | 0.21        |

*Nota.* Valor de la oportunidad de inversión cuando  $V = F = 1$ , por dólar de proyecto, calculado con las ecuaciones (4) y (12). Bloque 1: varianza ( $\lambda = 0$ ,  $\delta_f = 0.10$  fijos). Parámetros del caso base:  $\sigma_v^2 = \sigma_f^2 = 0.04$ ;  $\delta_v = \delta_f = 0.10$ ;  $\lambda = 0$ .

# Valor de la oportunidad de inversión

| $\delta_v$  | 0.05        |             |             | 0.10        |             |             | 0.25        |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\rho_{vf}$ | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         |
| $\lambda$   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| <b>0.00</b> | <b>0.45</b> | <b>0.40</b> | <b>0.34</b> | <b>0.27</b> | <b>0.23</b> | <b>0.16</b> | <b>0.11</b> | <b>0.08</b> | <b>0.04</b> |
| <b>0.05</b> | 0.33        | 0.29        | 0.24        | 0.23        | 0.19        | 0.13        | 0.10        | 0.07        | 0.04        |
| <b>0.10</b> | 0.27        | 0.23        | 0.19        | 0.20        | 0.16        | 0.12        | 0.10        | 0.07        | 0.04        |
| <b>0.25</b> | 0.19        | 0.16        | 0.12        | 0.15        | 0.12        | 0.09        | 0.09        | 0.06        | 0.04        |

Nota. Bloque 2: probabilidad anual  $\lambda$  de que  $V$  salte a cero ( $\sigma_v^2 = \sigma_f^2 = 0.04$ ,  $\delta_f = 0.10$  fijos).

| $\delta_v$  | 0.05        |             |             | 0.10        |             |             | 0.25        |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\rho_{vf}$ | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         |
| $\delta_f$  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| <b>0.01</b> | 0.30        | 0.23        | 0.14        | 0.18        | 0.13        | 0.07        | 0.08        | 0.06        | 0.03        |
| <b>0.05</b> | 0.37        | 0.31        | 0.23        | 0.22        | 0.17        | 0.10        | 0.09        | 0.06        | 0.03        |
| <b>0.10</b> | <b>0.45</b> | <b>0.40</b> | <b>0.34</b> | <b>0.27</b> | <b>0.23</b> | <b>0.16</b> | <b>0.11</b> | <b>0.08</b> | <b>0.04</b> |
| <b>0.25</b> | 0.60        | 0.58        | 0.56        | 0.42        | 0.39        | 0.36        | 0.18        | 0.15        | 0.10        |

Nota. Bloque 3:  $\delta_f$  ( $\sigma_v^2 = \sigma_f^2 = 0.04$ ,  $\lambda = 0$  fijos).

# Nivel de $V/F$ al que conviene invertir

| $\delta_v$               | 0.05        |             |             | 0.10        |             |             | 0.25        |             |             |
|--------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\rho_{vf}$              | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         |
| $\sigma_v^2, \sigma_f^2$ |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| <b>0.01</b>              | 2.50        | 2.35        | 2.18        | 1.47        | 1.37        | 1.25        | 1.09        | 1.06        | 1.03        |
| <b>0.02</b>              | 2.91        | 2.64        | 2.35        | 1.72        | 1.56        | 1.37        | 1.18        | 1.12        | 1.06        |
| <b>0.04</b>              | <b>3.65</b> | <b>3.17</b> | <b>2.64</b> | <b>2.13</b> | <b>1.86</b> | <b>1.56</b> | <b>1.34</b> | <b>1.24</b> | <b>1.12</b> |
| <b>0.10</b>              | 5.65        | 4.56        | 3.41        | 3.19        | 2.62        | 2.00        | 1.77        | 1.54        | 1.29        |
| <b>0.20</b>              | 8.77        | 6.70        | 4.56        | 4.79        | 3.73        | 2.62        | 2.44        | 2.00        | 1.54        |
| <b>0.30</b>              | 11.83       | 8.77        | 5.65        | 6.34        | 4.79        | 3.19        | 3.07        | 2.44        | 1.77        |

Nota. Valor de los beneficios relativo al costo de inversión ( $V/F$ ) al que la inversión es óptima ( $C^*$ ), calculado con las ecuaciones (4) y (12). Bloque 1: varianza ( $\lambda = 0$ ,  $\delta_f = 0.10$  fijos).

Con parámetros razonables es óptimo esperar hasta que el valor del proyecto **duplique** el costo de inversión.

# Nivel de $V/F$ al que conviene invertir

| $\delta_v$  | 0.05        |             |             | 0.10        |             |             | 0.25        |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\rho_{vf}$ | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         |
| $\lambda$   |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| <b>0.00</b> | <b>3.65</b> | <b>3.17</b> | <b>2.64</b> | <b>2.13</b> | <b>1.86</b> | <b>1.56</b> | <b>1.34</b> | <b>1.24</b> | <b>1.12</b> |
| <b>0.05</b> | 2.50        | 2.23        | 1.92        | 1.86        | 1.67        | 1.44        | 1.32        | 1.23        | 1.12        |
| <b>0.10</b> | 2.10        | 1.90        | 1.67        | 1.72        | 1.56        | 1.37        | 1.30        | 1.22        | 1.12        |
| <b>0.25</b> | 1.67        | 1.54        | 1.40        | 1.51        | 1.40        | 1.27        | 1.27        | 1.19        | 1.11        |

Nota. Bloque 2: probabilidad anual  $\lambda$  de que  $V$  salte a cero ( $\sigma_v^2 = \sigma_f^2 = 0.04$ ,  $\delta_f = 0.10$  fijos).

| $\delta_v$  | 0.05        |             |             | 0.10        |             |             | 0.25        |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\rho_{vf}$ | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         | -0.5        | 0.0         | 0.5         |
| $\delta_f$  |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| <b>0.01</b> | 2.31        | 1.89        | 1.46        | 1.64        | 1.43        | 1.22        | 1.25        | 1.17        | 1.08        |
| <b>0.05</b> | 2.85        | 2.38        | 1.86        | 1.83        | 1.58        | 1.32        | 1.28        | 1.19        | 1.10        |
| <b>0.10</b> | <b>3.65</b> | <b>3.17</b> | <b>2.64</b> | <b>2.13</b> | <b>1.86</b> | <b>1.56</b> | <b>1.34</b> | <b>1.24</b> | <b>1.12</b> |
| <b>0.25</b> | 6.42        | 5.96        | 5.49        | 3.35        | 3.09        | 2.81        | 1.62        | 1.49        | 1.33        |

Nota. Bloque 3:  $\delta_f$  ( $\sigma_v^2 = \sigma_f^2 = 0.04$ ,  $\lambda = 0$  fijos).

# Estáticas comparativas de las Tablas I y II

- $\sigma^2 \uparrow$  : valor de la opción  $\uparrow$ ,  $C^*$   $\uparrow$ .
- $\delta_f \uparrow$  : valor  $\uparrow$ ,  $C^*$   $\uparrow$  — crece el ahorro por diferir el desembolso.
- $\delta_v \uparrow$  : valor  $\downarrow$ ,  $C^*$   $\downarrow$  — el efecto más fuerte.
- $\rho_{vf} \uparrow$  : valor  $\downarrow$ ,  $C^*$   $\downarrow$  — se reduce la varianza del ratio.
- $\lambda \uparrow$  : valor  $\downarrow$ ,  $C^*$   $\downarrow$  — equivale a descontar a  $\mu + \lambda$ .

# El monopolista: tecnología, demanda y shock

El valor del proyecto se construye desde una firma explícita:

$$Q_t = K^{1-\beta} L_t^\beta, \quad P_t = \theta_t Q_t^{-1/\eta}, \quad \frac{d\theta}{\theta} = \alpha_\theta dt + \sigma_\theta dz_\theta$$

Capital rígido (la inversión irreversible), trabajo flexible; toda la incertidumbre entra por el desplazador de demanda  $\theta_t$ .

$$\pi_t^* = B \theta_t^\gamma, \quad \gamma = [1 - \beta(1 - 1/\eta)]^{-1} > 1$$

El beneficio maximizado es convexo en el shock: con  $\beta = 2/3$  y  $\eta = 2$ ,  $\gamma = 1.5$ .

# El monopolista: $V$ y $\delta_v$ endógenos

Valor del proyecto instalado y retornos:

$$V(\theta_0) = \frac{B \theta_0^\gamma}{\hat{\alpha}_v - \alpha_v}, \quad \alpha_v = \gamma \alpha_\theta + \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) \sigma_\theta^2, \quad \hat{\alpha}_v = r + \phi \rho_{\theta m} \gamma \sigma_\theta$$

$$\delta_v = \hat{\alpha}_v - \alpha_v = B \theta_0^\gamma / V_0$$

El payout del proyecto instalado deja de ser un supuesto: queda derivado de la tecnología y la demanda.

# Valores de la opción y reglas de inversión

| $\alpha_\theta$   | -0.03           |                 |                 | 0.00            |                 |                 | 0.01            |                 |                 |
|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\rho_{\theta m}$ | 0.0             | 0.2             | 0.5             | 0.0             | 0.2             | 0.5             | 0.0             | 0.2             | 0.5             |
| $\sigma_\theta^2$ |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
| <b>0.01</b>       | 0.074<br>(1.22) | 0.060<br>(1.18) | 0.046<br>(1.13) | 0.189<br>(1.68) | 0.131<br>(1.43) | 0.084<br>(1.26) | 0.290<br>(2.25) | 0.189<br>(1.68) | 0.111<br>(1.35) |
| <b>0.04</b>       | 0.223<br>(1.85) | 0.166<br>(1.58) | 0.118<br>(1.38) | 0.413<br>(3.28) | 0.266<br>(2.09) | 0.166<br>(1.58) | 0.549<br>(5.28) | 0.326<br>(2.50) | 0.191<br>(1.69) |
| <b>0.10</b>       | 0.440<br>(3.58) | 0.304<br>(2.35) | 0.206<br>(1.76) | 0.755<br>(13.7) | 0.430<br>(3.47) | 0.259<br>(2.05) | *<br>*          | 0.497<br>(4.36) | 0.284<br>(2.20) |
| <b>0.20</b>       | 0.765<br>(14.6) | 0.474<br>(4.02) | 0.305<br>(2.35) | *<br>*          | 0.632<br>(7.37) | 0.363<br>(2.80) | *<br>*          | 0.715<br>(11.0) | 0.387<br>(3.02) |

*Nota.* Valor de la opción; entre paréntesis, nivel óptimo de inversión. Parámetros:  $\eta = 2$ ;  $r = 0.05$ ;  $\beta = 2/3$ ;  $\phi = 0.50$ ;  $V = 1$ ;  $F = 1$  no estocástico. \*Para esos valores  $\delta_v < 0$  y el valor de la opción no está definido.

# Conclusiones

La regla clásica del VAN invierte *demasiado pronto*: bajo incertidumbre e irreversibilidad,  $VN = 0$  no es señal de invertir, sino de que todavía conviene esperar.

No alcanza con  $V > F$ : hay que esperar hasta  $V/F \geq C^*$  ( $\approx 1.86$  en el caso base) — el proyecto debe valer **un 86 % más** que su costo antes de invertir.

“El valor perdido por adoptar subóptimamente un proyecto de VAN cero está fácilmente entre el **10 y el 20 por ciento** (o más) del valor del proyecto.”

Bajo incertidumbre, esperar deja de ser indecisión: es una **decisión con valor propio y medible**.

# Limitaciones del modelo base

El marco de 1986 es potente, pero deja afuera tres situaciones que la literatura posterior abordó:

- **El costo  $F$  como MBG perpetuo:** tratar un bien físico como un browniano sin límite es irreal; a largo plazo los costos de capital tienden a *revertir a la media*.
- **Inversión indivisible (“lumpy”):** no admite proyectos complejos donde el capital se desembolsa *por etapas*.
- **Sin flexibilidad intermedia:** no contempla encoger, expandir ni abandonar parcialmente la escala si el mercado cambia.

# Inversión en fases: trabajos posteriores

Cuando el capital se desembolsa por etapas, invertir hoy compra el **derecho a seguir**, no la obligación de terminar el proyecto:

- **Fase de estudio:** un desembolso chico y reversible (un estudio de factibilidad) revela información sin comprometer gran capital.
- **Opciones compuestas:** cada fase es una *opción sobre otra opción* — completar la Fase 1 habilita, pero no obliga, a la Fase 2.
- **Umbral más bajo:** la información temprana reduce el riesgo y **baja el umbral óptimo  $C^*$** .

Majd y Pindyck (1987), “Time to Build, Option Value, and Investment Decisions”; Pindyck (1993), “Investments of Uncertain Cost”. *Journal of Financial Economics*.

# La evolución de la teoría (post-1986)

- **Dixit y Pindyck (1994):** el libro *Investment Under Uncertainty* unifica la teoría y la vuelve central en las finanzas corporativas.
- **Histéresis (Pindyck 1988; Dixit 1989):** entrada y salida de mercados bajo incertidumbre; explica el retraso de las firmas ante cambios de precios.
- **Interacción de opciones (Trigeorgis 1993):** proyectos con varias opciones simultáneas e interdependientes —esperar, expandir, abandonar.